

1. CROMOS



Juan colecciona cromos de los dos equipos de fútbol que hay en su ciudad, el equipo A y el equipo B. Los cromos los pega en las 6 hojas de un álbum, de modo que en cada hoja o bien hay jugadores del equipo A o bien del equipo B, *pero nunca están mezclados*. El número de cromos que hay pegados en cada hoja son 6, 12, 14, 15, 23 y 29. Juan, señalando una de las hojas, afirma: “si regalo esta hoja de cromos, quedarán el doble de cromos del equipo A que del equipo B”.

a) ¿Es posible que la hoja a la que se refiere Juan sea la de 14 cromos? ¿Por qué?

NO, porque tiene que quedar un múltiplo de 3

b) ¿Podría ser la de 15 cromos? ¿Por qué?

NO, porque quedan 84 pero $84/3=28$ no es suma de ningún conjunto de hojas

c) ¿Y la de 12 cromos? ¿Por qué?

SÍ, porque quedan 87 cromos y $87/3=29$ que sí es suma de diferentes hojas.

d) Si es posible alguno de los casos anteriores ¿cuántos cromos le quedarían de cada equipo en ese caso? ¿En qué hojas estarían los cromos del equipo A?

Equipo A = 58 cromos	Equipo B = 29 cromos
6, 14, 15, 23	29
14, 15, 29	6, 23
6, 23, 29	14, 15

2. FICHAS DE COLORES



Tenemos miles de fichas numeradas, en cada ficha hay un número y hay fichas que tienen el mismo número. Las queremos pintar de color rojo, verde o azul con las siguientes condiciones que no pueden entrar en contradicción:

- * La ficha número 1 se pinta inicialmente de un color.
- * La ficha que le corresponde el número suma de dos fichas con números azules (iguales o distintos) la pintamos de verde.
- * La ficha que le corresponde el número suma de dos fichas con números verdes (iguales o distintos) la pintamos de azul.
- * Todas las fichas cuyos números no pueden obtenerse como suma de 2 números verdes o dos números azules las pintamos de rojo.

- a) Si la que tiene el número 1 la pintamos de color verde, ¿qué color deben tener las fichas con los números del 1 hasta el 10?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	a	r	v	a	r	v	a	r	v

- b) Si la que tiene el número 1 la pintamos de color verde, como antes, ¿de qué color será la que está numerada con el 125? ¿Y con el 381? ¿Por qué?

125	381
a	r

$$125 = 41 \cdot 3 + 2 \quad ; \quad 381 = 127 \cdot 3 + 0$$

- c) Si la ficha con el número 1 la pintamos de azul, ¿de qué color sería la ficha con el número 2009? ¿Por qué?

La sucesión ahora es: a, v, r, a, v, r, ... Por lo tanto, el número 2009 es verde.

$$2009 = 669 \cdot 3 + 2$$

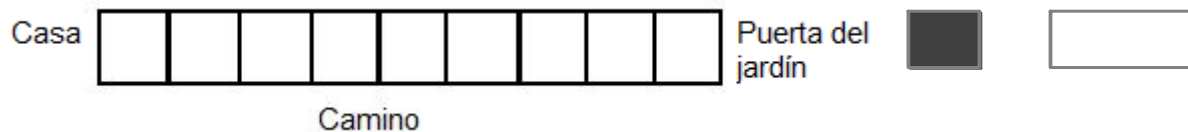
- d) Si la ficha con el número 1 la pintamos de rojo, la que tiene el número 2 la pintamos de verde y, a partir de ahí, se siguen las condiciones iniciales ¿de qué color tendría que ser la ficha numerada 121? ¿Y la 128? ¿Por qué?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	v	r	a	r	r	r	v	r	a

Las fichas impares son rojas. Las fichas pares siguen la misma secuencia que el apartado a). El 121 es impar, es roja. El 128 es $2 \cdot 64$, por tanto es, como la 64 de a), verde.

3. EMBALDOSAR

En casa de Marta hay un camino que mide 9 metros de largo y 1 metro de ancho, que va desde la Casa hasta la Puerta del jardín. Queremos recubrir el camino con baldosas y tenemos dos clases de baldosas: baldosas cuadradas 1m x 1m de color negro y baldosas rectangulares 2m x 1m de color blanco.



- a) ¿De cuántas formas se puede recubrir el camino si utilizamos 4 baldosas rectangulares y una cuadrada?

De 5 formas

- b) Si utilizamos 3 baldosas rectangulares y 3 cuadradas ¿de cuántas maneras se puede embaldosar el camino?

De 20 formas

- c) Y si utilizamos 2 baldosas rectangulares y 5 cuadradas ¿de cuántas formas se puede hacer?

De 21 formas

- d) Encuentra todas las formas posibles de embaldosar el camino.

Con 7 baldosas cuadradas (1 rectangular): 8 formas.

Con 9 baldosas cuadradas (0 rectangulares): 1 forma.

El total de formas posibles de embaldosar con 4, 3, 2, 1, ó 0 baldosas rectangulares es:
 $5+20+21+8+1=55$

(10º término de la sucesión de Fibonacci).

La solución para un camino de n baldosas es el término n+1 de la sucesión.

--

Dado un número lo podemos descomponer de varias formas como suma de números positivos. Por ejemplo, el número 7 lo podemos descomponer así:

Descomposición	Producto de los sumandos
$6 + 1$	6
$5 + 2$	10
$4 + 3$	12
$5 + 1 + 1$	5
$4 + 2 + 1$	8
$3 + 3 + 1$	9
$3 + 2 + 2$	12
$4 + 1 + 1 + 1$	4
$3 + 2 + 1 + 1$	6
$2 + 2 + 2 + 1$	8
$3 + 1 + 1 + 1 + 1$	3
$2 + 2 + 1 + 1 + 1$	4
$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	2
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	1

A cada una de estas descomposiciones le hacemos corresponder el producto de sus sumandos, como se observa en la tabla anterior, y entonces podemos ver que el producto mayor asociado a las descomposiciones de 7 es 12. Pero es un poco pesado tener que escribir todas las formas de descomposición para llegar a este resultado.

a) Explica por qué, para el número 12, la descomposición $1 + 2 + 3 + 6$ no da el producto mayor de todas las descomposiciones.

Porque podemos cambiar el 1+2 por un 3 y ya saldría un producto mayor
Porque podemos cambiar el 6 por 3+3 y ya saldría un producto mayor

.....

b) ¿Cuál es el producto mayor para el número 12?

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

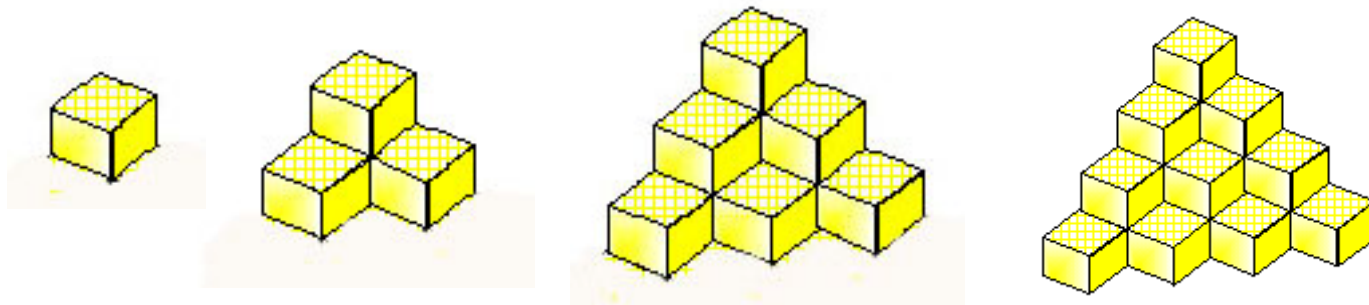
c) ¿Y para 11 y 13?

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18 \quad ; \quad 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$$

d) ¿Y para 31?

[illegible]

5. TORRE DE CUBOS



Tenemos torres de cubos como las que se observan en la figura y queremos pegar unas pegatinas en las caras que no están tapadas por otra cara de un cubo ni están sobre el suelo. Contamos con 2325 pegatinas.

- a) Según la cantidad de pisos que tenga la torre podremos pegar un número determinado de pegatinas. Completa la siguiente tabla.

Número de pisos	1	2	3	4	5	6
Número de pegatinas que es posible pegar	5	15	30	50	75	105

- b) ¿Cuántos pisos tendría que tener la torre para colocar 390 pegatinas?

12 pisos

- c) ¿Cuántos pisos tendría que tener la torre para colocar las 2325 pegatinas?

30 pisos

- d) Relaciona el número de pisos de la torre con el número de pegatinas.

$$5n(n+1)/2$$